Grado M+I
Curso 2014-2015

Cálculo I

Matemática Aplicada
ETSII-UPM

Ejercicios - Tema 4

Cálculo Integral

1.1 Cálculo de primitivas

Ejercicio 1.1.1. Calcula las siguientes integrales inmediatas:

i) $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$ ii) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{2+e^{2x}}\,dx$ iii) $\displaystyle\int \sqrt{x+2}\,dx$

iv) $\displaystyle\int \frac{(\operatorname{arcsen} x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ v) $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^2+25}$ vi) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

vii) $\displaystyle\int \frac{8x^2}{(x^3+1)^2}\,dx$ viii) $\displaystyle\int \ln(\cos x)\,\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx$ ix) $\displaystyle\int \cot x\,dx$

Ejercicio 1.1.2. Calcula las siguientes integrales racionales:

i) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2}$ ii) $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{x^3+2x^2-x-2}$ iii) $\displaystyle\int \frac{x^2+6x-1}{x^3-7x^2+15x-9}dx$

iv) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}dx$ v) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-x+2}dx$ vi) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx$

Ejercicio 1.1.3. Calcula mediante cambio de variable las integrales:

i) $\displaystyle\int x\sqrt{x-1}\,dx$ ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$ iii) $\displaystyle\int \frac{e^x-3e^{2x}}{1+e^x}\,dx$

iv) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x}$ v) $\displaystyle\int 2x\sqrt[3]{x^2+1}\,dx$ vi) $\displaystyle\int \sqrt{1+e^{2x}}\,dx$

Ejercicio 1.1.4. Calcula las siguientes integrales trigonométricas:

i) $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx$ ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$ iii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x\cos x}$ iv) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$

Ejercicio 1.1.5. Calcula por partes las integrales siguientes:

i) $\displaystyle\int (\ln x)^2\,dx$ ii) $\displaystyle\int \arctan x\,dx$ iii) $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} x\,dx$

iv) $\displaystyle\int x\ln x\,dx$ v) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$ vi) $\displaystyle\int x\operatorname{sen} x\,dx$

vii) $\displaystyle\int xe^x\,dx$ viii) $\displaystyle\int e^{ax}\operatorname{sen}^2 x\,dx$ ix) $\displaystyle\int e^{ax}\cos^2 x\,dx$

1.2 Integración

Ejercicio 1.2.1. Calcula la derivada de la siguientes funciones

$$\text{i)}\quad F(x) = \int_0^x (t+1)\sqrt{t}\; dt \qquad \text{ii)}\quad G(x) = \int_0^{x^2} \ln(1+t)\operatorname{sen} t^2\; dx$$

Ejercicio 1.2.2. Encuentra una función definida y continua en el intervalo $[0, \infty)$ que verifique

$$\int_0^{x^2} \ln(1+t) f(t)\; dt = 2x.$$

Ejercicio 1.2.3. Calcula los máximos y mínimos de la función $F(x) = \displaystyle\int_0^x t^5 e^{-t^2}\; dt$, con $x \in [-1, 1]$.

Ejercicio 1.2.4. Calcula los siguientes límites:

$$\text{i)}\quad \lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{x^2} \operatorname{sen}\sqrt{t}\; dt}{x^3} \qquad\qquad \text{ii)}\quad \lim_{x\to\infty} e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$$

1.3 Aplicaciones: cálculo de áreas, longitudes y volúmenes

Ejercicio 1.3.1. Dadas las curvas: $x^2+y^2-2rx=0$ y $x^2+y^2-2ry=0$, con $r>0$, se pide:

i) Determinar el área de la región común a ambas curvas.

ii) Calcular el volumen de revolución engendrado al girar dicha región en torno al eje OX.

Ejercicio 1.3.2. Calcula el volumen del hiperboloide engendrado al girar alrededor del eje OX la porción de la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = a^2$ comprendida entre las rectas $x = a$ y $x = 2a$.

Ejercicio 1.3.3. Calcula el volumen que queda de una esfera de radio $2r$, si eliminamos el volumen limitado por un cilindro circular de radio r que tiene por eje un diámetro de la esfera.

Ejercicio 1.3.4. Sean la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ y la circunferencia de radio r de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$. Se pide:

i) Calcular r para que el volumen de revolución engendrado por ambas al girar alrededor del eje OX coincida.

ii) Para ese valor de r calcular el volumen de revolución engendrado por la región común a ambas al girar alrededor del eje OX.

Ejercicio 1.3.5. Calcula el volumen del sólido cuya base es la región del plano limitada por la curva $y = \dfrac{\sqrt[4]{2-x}}{\sqrt[4]{x}}$ y tal que toda sección perpendicular al eje x es un cuadrado.

1.4 Integrales impropias

Ejercicio 1.4.1. Estudia la convergencia de las siguientes integrales impropias:

i) $\displaystyle\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{\ln x}\,dx$ ii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2x^2+b^2}$ iii) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

iv) $\displaystyle\int_{-1}^5 \frac{dx}{(x-1)^3}$ v) $\displaystyle\int_1^{\infty} \operatorname{sen}^2\frac{1}{x}\,dx$ vi) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$

Ejercicio 1.4.2. Halla la longitud de la astroide, de ecuación $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, entre los puntos de abcisa $x=0$ y $x=a$.

1.5 Cuestiones

Ejercicio 1.5.1. Decide si las siguientes proposiciones son ciertas. Razona la respuesta si es verdadera o busca un contraejemplo si no lo es.

i) La función $f(x)=\begin{cases} x+E(x) & x\in\mathbb{Q}\cap[0,2] \\ 0 & \text{resto}\end{cases}$ es integrable en $[0,2]$.

ii) Sea f una función continua en $[a,b]$, entonces el área limitada por las rectas $x=a$, $x=b$ y por la gráfica de f viene dada por la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

iii) Si $F(x)=\displaystyle\int_0^{x^2}\tan(t)\ln(1+t^2)\,dt$, entonces F es derivable en el intervalo $[0,5]$